Chapitre 17

Etude asymptotique des suites

Ce chapitre revient sur des notions déjà vues pour les fonctions (dans le chapitre 10 : comparaison des fonctions). Les preuves étant quasiment identiques, elles sont ignorées ici.

I Négligeabilité

1) Généralités :

a) Définition

Définition 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, APCR,

$$u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \lim \varepsilon_n = 0$$

On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ et on lit : u_n est "un petit o" de v_n.

Exemples :

1. Soient $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. Comme $u_n = \dfrac{1}{n}v_n$ et que $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, alors $u_n = o(v_n)$
2. $\sqrt{n}$ est négligeable devant n. En effet, on peut écrire $\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}n$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

Remarque :
Attention : malgré la notation, $o(v_n)$ ne désigne pas une fonction de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais toute une famille de suites qui sont négligeables devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

? Le saviez-vous ? *Edmund Landau*

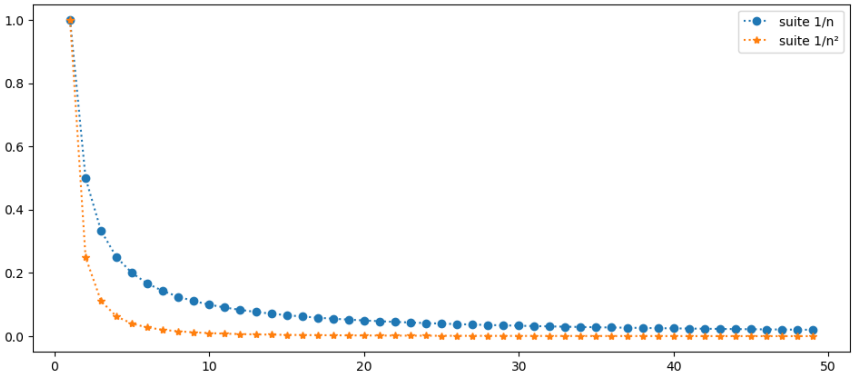
Bien que la notion de négligeabilité a existé avant lui, on doit la notation "petit o" au mathématicien Edmund Landau (1877-1938). Cette notation provient en fait du mot allemand "Ordnung" (l'ordre).



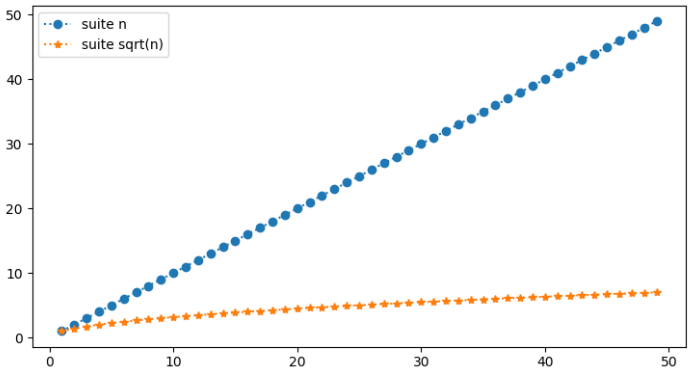
Edmund Landau est auteur de nombreux travaux sur la théorie des nombres, et son sens du travail et sa passion pour les mathématiques étaient unanimement reconnus.
Professeur à l'université de Berlin, puis de Göttingen, il doit fuir la ville avec la montée du nazisme en 1933. De retour à Berlin, Landau n'est plus autorisé à enseigner, à cause de sa judeité. Il écrit néanmoins des cours, présentés par un autre enseignant tandis qu'il reste assis parmi les élèves dans la salle.
La violence de l'antisémitisme est telle qu'en novembre 1938, des élèves de l'université, accompagnés par plusieurs soldats du régime, lui refusent définitivement l'accès...

b) Interprétation

L'idée derrière la négligeabilité est de pouvoir comparer le comportement asymptotique de suites. Ainsi, dire que $u_n = o(v_n)$ signifie que u_n est très petite devant v_n.
Par exemple : $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ sont toutes deux des suites tendant vers 0, mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va "plus vite" vers 0 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



On peut faire la même remarque pour des suites qui tendent vers $+\infty$: $\sqrt{n}$ va "moins vite" en $+\infty$ que n, ce que traduit $\sqrt{n} = o(n)$:



Cette idée de vitesse de convergence peut se sentir à travers la caractérisation suivante :

Proposition 1

Si $v_n \neq 0$ (APCR), alors $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

2) Propriétés

La notion de négligeabilité est stable par combinaison linéaire, plus précisément :

Proposition 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites, λ et μ deux réels.
Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors
(i) $u_n + v_n = o(w_n)$
(ii) $\lambda u_n = o(w_n)$
(i)+(ii) $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$

La négligeabilité est de plus transitive :

Proposition 3

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites.
Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$

3) Négligeabilités usuelles

Les résultats suivants, réutilisables sans preuve, sont très pratiques pour comparer des suites à l'infini :

Proposition 4

Pour tous α, β réels, si $\alpha < \beta$, alors $n^\alpha = o(n^\beta)$

▷ *Preuve* : En effet, $\dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta} = e^{(\alpha-\beta)ln(n)}$ avec $\alpha - \beta < 0$, donc $(\alpha-\beta)ln(n) \to -\infty$ et par composition $\dfrac{n^\alpha}{n^\beta} \to 0$ ◁

Exemples :

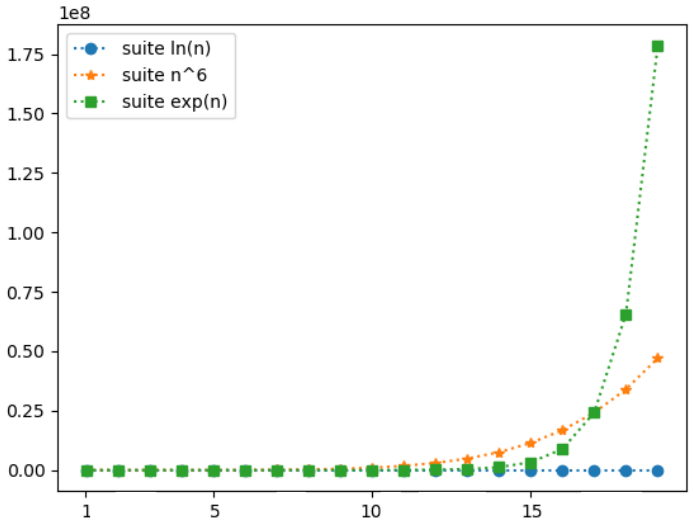
Les comparaisons $\dfrac{1}{n^2} = o(\dfrac{1}{n})$ et $\sqrt{n} = o(n)$ relèvent de cette proposition.

Proposition 5 (*Croissances comparées*)

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(n)^\alpha = o(n^\beta) \qquad n^\alpha = o(e^{n\beta})$$

En particulier, si $q > 1$, $n^\alpha = o(q^n)$ et si $q \in]-1, 1[$, $q^n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$



II Suites équivalentes

1) Généralités

a) Définition

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

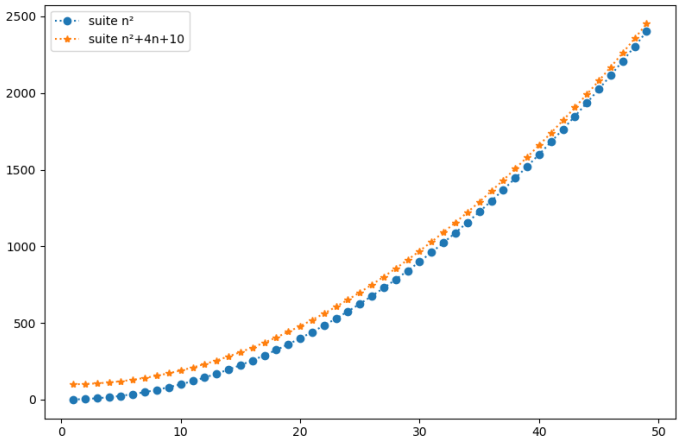
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha_n v_n \quad et \quad \lim \alpha_n = 1$$

On note alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Exemples :

1. Soient, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - n + 100$ et $v_n = n^2$. Alors $u_n = n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{100}{n^2}) = v_n\alpha_n$ avec $\lim \alpha_n = \lim 1 - \frac{1}{n} + \frac{100}{n^2} = 1$. Donc $u_n \sim v_n$.
2. Soit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^n - n^{132}$. Alors $u_n = e^n\left(1 - \frac{n^{132}}{e^n}\right)$. Or $\left(1 - \frac{n^{132}}{e^n}\right) \to 1$ par croissances comparées.
   Donc $e^n - n^{132} \underset{+\infty}{\sim} e^n$.

Interprétation :
L'équivalence traduit une "presque égalité" à l'infini. Par exemple :



Ce que le résultat ci-dessous peut permettre de mieux "sentir" :

Proposition 6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $v_n \neq 0$ (APCR). Alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$$

On peut aussi dire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, leur différence est négligeable.... et c'est ce que dit le résultat suivant :

Proposition 7

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$$

Exemple :
Pour $u_n = e^n - n^{132}$, on a $-n^{132} = o(e^n)$ par croissance comparée, donc $u_n = e^n + o(e^n)$, c'est à dire $u_n \underset{+\infty}{\sim} e^n$.

b) Propriétés algébriques

Propriété 1

(i) si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$ (relation symétrique)
(ii) si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$ (relation transitive)

c) Lien entre limites et équivalents

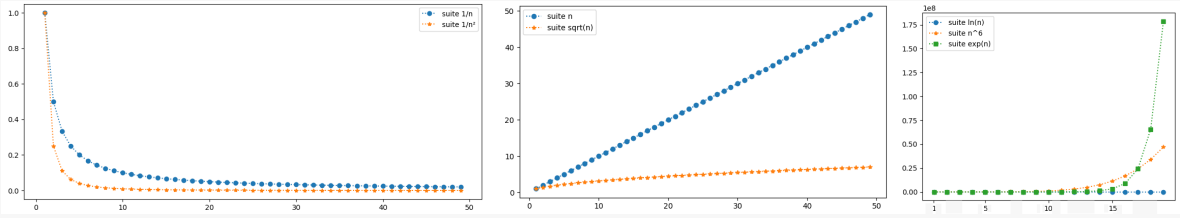
Proposition 8

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes, alors si l'une d'elle admet une limite, l'autre admet la même limite.

▷ *Preuve* : Soit $\ell \in \mathbb{K}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$. Supposons $\lim u_n = \ell$. Alors $v_n = v_n \times \dfrac{u_n}{u_n} = \underbrace{\dfrac{v_n}{u_n}}_{\to 1}\underbrace{u_n}_{\to \ell}$ Donc par produit de limite $\lim v_n = \ell$. ◁

Exemple :
On a vu que $e^n - n^{132} \sim e^n$, donc par le lien limite et équivalent, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n - n^{132} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$

Danger ! *"Equivalent" veut dire plus que "même limite" !*
Deux suites ayant même limite ne sont pas forcément équivalentes. Si cela est vrai pour des limites finies non nulles, dès lors que la limite est infinie ou nulle, cela peut s'avérer faux.
Ainsi, dans la partie négligeabilité, on a vu les exemples ci dessous :



A chaque fois, les limites sont égales, mais les suites ne sont pas du tout équivalentes....

2) Equivalents usuels

a) Polynômes

Théorème 1

Une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré.

▷ *Preuve* : Soit $u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_p n^p$ avec $a_p \neq 0$. Alors

$$u_n = a_p n^p \underbrace{\left(\underbrace{\frac{a_0}{a_p n^p} + \frac{a_1}{a_p n^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{a_p n}}_{\to 0} + 1 \right)}_{\to 1}$$

d'où $\dfrac{u_n}{a_p n^p} \to 1$: $u_n \sim a_p n^p$. ◁

Exemple : $u_n = n^2 - n + 2 \sim n^2$

b) Equivalents issus de la dérivation

On a vu dans le chapitre sur les comparaisons de fonction comment transformer la limite de dérivation en équivalence. On a alors le formulaire suivant :

Proposition 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite non nulle APCR,* $\boxed{\text{avec } \lim u_n = 0}$, *alors*

(i) $\sin(u_n) \sim u_n$
(ii) $\tan(u_n) \sim u_n$
(iii) $\ln(1+u_n) \sim u_n$
(iv) $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
(v) $\arctan(u_n) \sim u_n$

Proposition 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite non nulle APCR,* $u_n > -1$ *avec* $\lim u_n = 0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, *alors*

$$(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$

En particulier

$$\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2}$$

Proposition 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite non nulle APCR avec* $\lim u_n = 0$, *alors*

$$\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$$

3) Opérations sur les équivalents

a) Opérations usuelles

Propriété 2

1. $\forall \lambda \neq 0$, *si* $u_n \sim v_n$, *alors* $\lambda u_n \sim \lambda v_n$ *(produit par un scalaire autorisé)*
2. *si* $u_n \sim x_n$ *et* $v_n \sim y_n$ *alors* $u_n v_n \sim x_n y_n$ *(produit d'équivalent autorisé)*
3. *si* $u_n \sim x_n$ *et* $v_n \sim y_n$, *et* y_n, v_n *non nuls APCR, alors* $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{x_n}{y_n}$ *(quotient d'équivalent autorisé)*
   En particulier si $v_n \sim y_n$, $\dfrac{1}{v_n} \sim \dfrac{1}{y_n}$ *(passage à l'inverse autorisé)*

b) Rares compositions autorisées :

Propriété 3

1. *Pour tout* $p \in \mathbb{Z}$, *si* $u_n \sim v_n$, *alors* $u_n^p \sim v_n^p$ *(puissance d'équivalents autorisée)*
2. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *avec* $u_n > 0$ *et* $v_n > 0$, *si* $u_n \sim v_n$ *alors* $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ *(puissance d'équivalents autorisée).*
   En particulier si $u_n \sim v_n$, *alors* $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$. *(racine carrée d'équivalents autorisée)*
3. *Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $|u_n| \sim |v_n|$ *(passage à la valeur absolue autorisée)*

Exemple :

Donner un équivalent de $u_n = \dfrac{(n^5+n^4+3n^2)^8}{(n^6+4n^4-n^3+2n)^7}$.

c) Ce qu'on n'a pas le droit de faire :

Presque tout le reste... En cas de doute, revenir à la définition ou faire le quotient : si ça tend vers 1, c'est bon, sinon, c'est perdu.

En particulier :

Danger ! *Sommes d'équivalents interdites*

Sauf exceptions (que l'on verra plus tard), la somme d'équivalent n'est pas possible.
Si $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$, on n'a pas forcément $u_n + v_n \sim x_n + y_n$.

Exemple :

Soit $u_n = n^2 + 2$, $x_n = n^2 + n$ et $v_n = -n^2$. On a $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim v_n$. Mais $u_n + v_n = 2$ qui n'est pas équivalent à $x_n + y_n = n$ ...

Danger ! *Compositions par une fonction interdites*

Composer par des fonctions autres que celles proposées dans la partie 3*b* est interdit.
Ainsi, si $u_n \sim v_n$, on a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$.

Exemple :

$n^2 + n \sim n^2$, mais $\dfrac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \to +\infty$ donc e^{n^2+n} n'est pas équivalent à e^{n^2}... En fait, on a même $e^{n^2} = o(e^{n^2+n})$!